Übungsklausur Wahrscheinlichkeit (Trolls Überraschungsei) 11
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x^3 - 3x^2$.
   a) Gib eine Stammfunktion von $f(x)$ an.
   b) Bestimme den Mittelwert von $f(x)$ über dem Intervall $[-2;2]$. (3VP)

2) Eine Basketballerin hat bei Freiwürfen eine Trefferquote von 80%.
   a) Gib die Bernoulli-Formel an, mit der die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: „Bei 10 Freiwürfen werden genau 7 Treffer erzielt“ berechnet werden kann. (Der Wert dieser Wahrscheinlichkeit muss nicht berechnet werden.)
   b) Wie viele verschiedene Ergebnisse gehören zu dem Ereignis A aus Teil a)?
   c) Die Wahrscheinlichkeit welches Ereignisses wird durch den folgenden Term beschrieben?

$$P(X\ ?\ ?) = 1 - \left(\binom{10}{8} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 + 10 \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2^1 + 0{,}8^{10} \right)$$ (3VP)

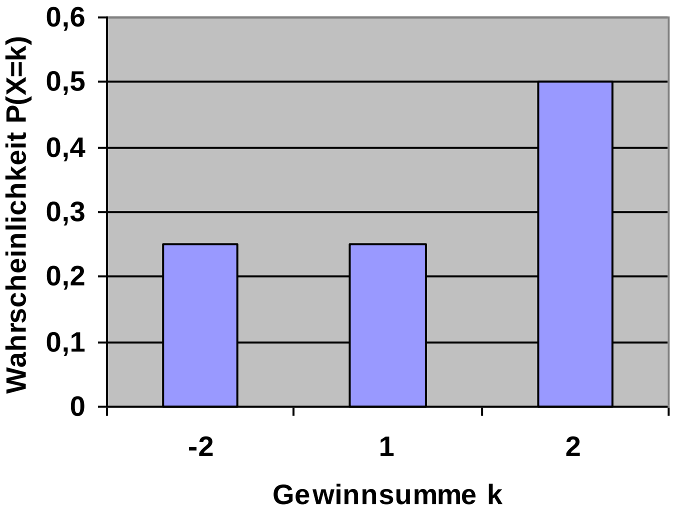
3) In einer Urne liegen eine schwarze und vier blaue Kugeln. Nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig gezogen und zur Seite gelegt, bis man die schwarze Kugel erhält.

   a) Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
      A: Man erhält spätestens beim zweiten Zug die schwarze Kugel.
      B: Man erhält die schwarze Kugel erst beim fünften Zug.

   b) Berechne, wie viele Ziehungen bei diesem Zufallsexperiment durchschnittlich zu erwarten sind. (4VP)

4) Bei einem Glücksspiel gilt für die Zufallsgröße X: „Gewinn nach Verrechnung mit dem Einsatz“ die rechts dargestellte Wahrscheinlichkeitsverteilung.

   a) Skizziere ein Glücksrad mit entsprechenden Segmenten und Gewinnsummen darauf, das für dieses Gewinnspiel verwendbar wäre.
   b) Prüfe durch Rechnung, wer (Veranstalter oder Spieler) auf lange Sicht bei dem Glücksspiel gewinnt.
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Spieler, nach zwei Spielen einen Verlust hinnehmen zu müssen?
   d) Wie müsste die Gewinnsumme der ersten Säule $k = -2$ verändert werden, damit das Spiel fair wird?



(5VP)

Übungsklausur Wahrscheinlichkeit (Trolls Überraschungsei) 11
Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Ein Überraschungseihersteller hat die neuen Trolls Sammelfiguren in seinen Schokoeiern. Der Hersteller wirbt damit, dass in jedem 6. Ei ein Troll ist. Klara und Leo lieben Trolls. Sie gehen in einen Laden, in dem eine riesige Tonne voll mit Überraschungseiern steht.

a) Klara und Leo kaufen zusammen 3 Eier.
   (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit genau einen Troll zu bekommen?
   (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einen Troll zu bekommen?
   (3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mehr als 1 aber weniger als 3 Trolls zu bekommen? (4,5VP)

b) An der Kasse entdecken die beiden Kinder Verkaufsdisplays mit 24 Eiern auf denen damit geworben wird, dass in jedem Display garantiert genau 4 Trolls Sammelfiguren enthalten sind.
   (1) Begründe, warum sich die Wahrscheinlichkeiten beim Kauf von Eiern aus **einem** vollen Display nicht mit der Binomialverteilung berechnen lassen.
   (2) Klara überlegt, ob es sinnvoller wäre die 3 Eier an der Kasse aus einem vollen Display zu nehmen. Berechne hierzu für dieses Display die Wahrscheinlichkeiten aus Teil a) (1) und (2) erneut und gib eine Empfehlung ab. (4,5VP)

c) Der Ladenbesitzer kommt auf die Idee die leeren Displays mit Eiern aus der riesigen Tonne wieder aufzufüllen.
   Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem wiederbefüllten Display:
   (1) genau 4 Trolls sind.
   (2) mehr als 4 Trolls sind.

   Für ein Schulfest werden fünf der wiederbefüllten Displays gekauft.

   (3) Wie viele Sammelfiguren kann man darin insgesamt erwarten?
   (4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass durch das Auffüllen insgesamt weniger Sammelfiguren in den fünf Displays enthalten sind als vom Hersteller auf dem Karton versprochen wurde? (4VP)

d) Leo kann durch Schütteln mit 80% Trefferwahrscheinlichkeit Eier mit Sammelfiguren von anderen Eiern unterscheiden. Wie viele „geschüttelte“ Eier sollte er kaufen, um mit mindestens 75% Wahrscheinlichkeit mindestens 20 Trollfiguren zu erhalten? (2VP)

Pflichtteil Lösungen:

1) a) $F(x) = x^4 - x^3$ (1P)

b) $m = \frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{4}\left[x^4 - x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}(16-8-(16+8)) = \frac{1}{4}\cdot(-16) = -4$ (2P) **3P**

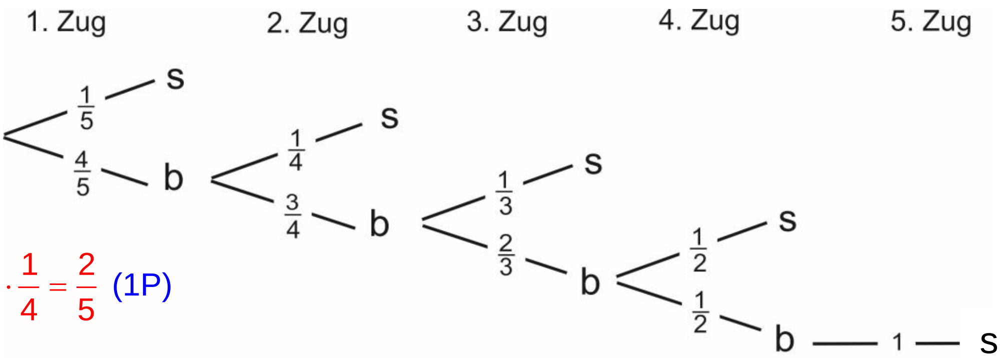
2) X = Anzahl der Treffer

a) $P(X=7) = \binom{10}{7}\cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3$ (1P)

b) $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\cdot(10-7)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 4 = 120$ (1P)

c) $P(X\le 7) = 1 - P(X\ge 8) = 1 - \left(\binom{10}{8}\cdot 0{,}8^8\cdot 0{,}2^2 + \binom{10}{9}\cdot 0{,}8^9\cdot 0{,}2^1 + \binom{10}{10}\cdot 0{,}8^{10}\cdot 0{,}2^0\right)$. (1P) **3P**

3)

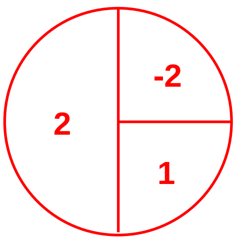


a) $P(A) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{5}$ (1P)

$P(B) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5}$ (1,5P)

b) $E(X) = \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot 2 + \frac{1}{5}\cdot 3 + \frac{1}{5}\cdot 4 + \frac{1}{5}\cdot 5 = \frac{15}{5} = 3$ (1,5P) **4P**

4) a)



(1P)

b) $E(\text{Gewinn}) = -2\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{3}{4}$ AW: Auf lange Sicht gewinnt der Spieler (1,5P)

c) $P(\text{Verlust nach zwei Spielen}) = P(-2/-2) + P(-2/1) + P(1/-2)$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{3}{16}$ (1P)

d) $E(\text{faires Spiel}) = a\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \boxed{a = -5}$ (1,5P) **5P**

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Wahrscheinlichkeit (Trolls Überraschungsei) 11

Wahlteil Lösungen:

a) X = Anzahl der Eier mit Troll

(1) $P(X=1) = \text{binompdf}\left(3, \frac{1}{6}, 1\right) = 0{,}3472 = 34{,}72\%$ (1,5P)

(2) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \text{binompdf}\left(3, \frac{1}{6}, 0\right) = 1 - 0{,}5787 = 0{,}4213 = 42{,}13\%$ (1,5P)

(3) $P(X=2) = \text{binompdf}\left(3, \frac{1}{6}, 2\right) = 0{,}0694 = 6{,}94\%$ (1,5P) **4,5P**

b) (1) Da bei dieser kleinen Menge an Eiern sich die Wahrscheinlichkeiten nach jeder „Ziehung" ändert. Damit handelt es sich nicht um eine Bernoullikette und man muss wie beim Ziehen ohne Zurücklegen rechnen. (1,5P)

(2) $P(X=1) = \frac{4}{24} \cdot \frac{20}{23} \cdot \frac{19}{22} \cdot 3 = 0{,}3755 = 37{,}55\%$ (1P)

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{20}{24} \cdot \frac{19}{23} \cdot \frac{18}{22} = 1 - 0{,}5632 = 0{,}4368 = 43{,}68\%$ (1,5P)

AW: Klara sollte die Eier aus dem Display kaufen. (0,5P) **4,5P**

c) (1) $P(X=4) = \text{binompdf}\left(24, \frac{1}{6}, 4\right) = 0{,}2139 = 21{,}39\%$ (1P)

(2) $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \text{binomcdf}\left(24, \frac{1}{6}, 4\right) = 1 - 0{,}6294 = 0{,}3706 = 37{,}06\%$ (1P)

(3) $E(X) = n \cdot p = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$ (1P)

(4) $P(X < 20) = P(X \leq 19) = \text{binomcdf}\left(120, \frac{1}{6}, 19\right) = 0{,}4620 = 46{,}20\%$ (1P) **4P**

d) X = Anzahl der Eier mit Troll

$n = ?;\ p = 0{,}8$

$P(X \geq 20) \geq 0{,}75$ (1P) $\Leftrightarrow 1 - P(X \leq 19) \geq 0{,}75 \Leftrightarrow P(X \leq 19) \leq 0{,}25$

$n = 26: P(X \leq 19) = 0{,}2526 \geq 0{,}25$

$n = 27: P(X \leq 19) = 0{,}1556 \leq 0{,}25$ OK!

Er sollte 27 geschüttelte Eier kaufen. (1P) **2P**

Summe: 15 Punkte